Bestimmung von e/m mit dem Fadenstrahlrohr (e/m)

Manuel Staebel – 2236632 / Michael Wack 2234088

1 Einleitung

Die beiden Naturkonstanten e und m, also die Ladung eines Elektrons (Elementarladung) und seine Masse, stellen wichtige Größen bei vielen Problemstellungen der Elektrodynamik und −statik dar. Die Elementarladung ist die kleinste Ladungsmenge, die isoliert existieren kann (sieht man mal von sehr kleinen Teilchen wie z.B. Quarks ab). Ihr Betrag tritt sowohl bei Elektronen, wie auch bei Protonen auf. Die Elektronenmasse ist unter anderem bei relativistischen Problemen als Ruhemasse sowie bei der Bestimmung von Materiewellenlängen von Bedeutung.
Der vorliegende Versuch ermöglicht die Ermittlung des Verhältnisses dieser beiden atomaren Größen durch die Bestimmung von einfach zu messenden makroskopischen bzw. elektrischen Werten.

2 Versuchsanordnung und −durchführung

Schickt man geladene Teilchen in ein magnetisches Feld, so werden Sie durch die Lorentzkraft auf Kreisbahnen um die Feldlinien gezwungen. Ihre Geschwindigkeit wird dadurch nicht beeinflusst. Ist die ursprüngliche Richtung der Teilchen nicht exakt senkrecht zu den Feldlinien, so bleibt die Geschwindigkeitskomponente parallel zu den Feldlinien erhalten und die Kreisbahnen verschieben sich zu Spiralbahnen. Der Radius der Kreisbahn ist von der Stärke des Magnetfeldes, der Geschwindigkeit der Teilchen sowie dem Verhältnis ihrer Masse und Ladung abhängig. Bestimmt man die Anfangsgeschwindigkeit und das Magnetfeld, so kann man das gesuchte Verhältnis von q/m bzw. im Fall von Elektronen e/m ausrechnen.
Im vorliegenden Experiment wird ein Fadenstrahlrohr benutzt um die Kreisbahnen der Elektronen sichtbar und somit deren Radius messbar zu machen. Im Fadenstrahlrohr befindet sich eine Glühkathode und eine ringförmige Anode um die Elektronen auf Ihre Anfangsgeschwindigkeit zu beschleunigen. Dies lässt sich durch die Beschleunigungsspannung U_0 zwischen Anode und Kathode regeln.
Damit die Elektronen beobachtet werden können, benötigt man Atome, die durch Kollissionen mit den Elektronen angeregt werden und beim Übergang in Ihren Grundzustand Licht im sichtbaren Bereich emittieren. Im Fadenstrahlrohr ist dies durch eine Füllung mit Wasserstoff mit 1,33 Pa Druck realisiert. Außerdem war noch ein Wehneltzylinder vorhanden, um den Elektronenstrahl zu fokusieren, allerdings mussten wir feststellen, dass sich mit zunehmender Spannung am Wehneltzylinder die Fokusierung eher verschlechterte als verbesserte, deshalb verzichten wir auf diese Möglichkeit.
Das Magnetfeld wurde durch ein, außerhalb des Fadenstrahlrohrs aufgestelltes, Helmholtzspulenpaar realisiert. Der Strom durch die Spulen betrug bei allen durchgeführten Messungen 1,5 A. Die Genauigkeit des Amperemeters lag über den gesamten Anzeigebereich bei $\pm 2{,}5\% \cdot 2{,}5\,\mathrm{A} = 0{,}07\,\mathrm{A}$. Hinzu kam ein Ablesefehler von $\pm 0{,}02\,\mathrm{A}$, so dass man insgesamt von einer Unsicherheit von $0{,}09\,\mathrm{A}$ ausgehen kann.
Im Inneren der Fadenstrahlröhre stellt sich ein Magnetfeld von
$B = \mu_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot N \cdot \frac{I}{R}$ ein, wie sich mit Hilfe des Gesetzes von Biot−Savart herleiten lässt.
Mit $N = 130\,;\, R = 0{,}15\,\Omega\,;\, I = 1{,}50 \pm 0{,}09\,\mathrm{A}$ ergibt sich $B = 1{,}17 \pm 0{,}07\ \ \mathrm{mT}$.
Um einen möglichst genauen Wert von e/m zu erhalten wurde der Elektronenkreisbahnradius bei fünf verschiedenen Beschleunigungsspannungen U_0 jeweils fünf mal bestimmt. Der Messfehler des Voltmeters betrug über den gesamten Messbereich $\pm 2{,}5\% \cdot 300\,\mathrm{V} = 7{,}5\,\mathrm{V}$. Hinzu kam ein Ablesefehler von $\pm 2\,\mathrm{V}$. Das ergibt insgesamt eine apparative Unsicherheit von $\pm 10\,\mathrm{V}$. Den Elektronenbahnkreisradius bestimmten wir mit Hilfe eines Höhenmessers vor einem Spiegel. Durch diesen wurde die exakt horizontale Messung sicher gestellt. Der Höhenmesser verfügte zwar über eine Noniusskala, allerdings war der Ablesefehler schon allein durch den einige Millimeter dicken Elektronenstrahl und die schlechten Lichtverhältnisse so groß, dass man auf diese feine Skaleneinteilung eigentlich hätte verzichten können. Wir schätzten den Fehler der Höhenmessung und somit des Kreisradius auf $\pm 2\,\mathrm{mm}$.

3 Versuchsauswertung

Um aus dem Kreisbahnradius r auf e/m schließen zu können, geht man davon aus, dass die Zentripetalkraft genau durch die Lorentzkraft aufgebracht wird.

Man erhält: $e\ v\ B = m\ \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{e}{m} = \frac{v}{B\ r}$ (1)

Die Geschwindigkeit ergibt sich durch Gleichsetzen der kinetischen Energie und der Energie, die zum Beschleunigen aufgewendet wurde.

Also $\frac{1}{2} m\, v^2 = e \cdot U_0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot e \cdot U_0}$ (2)

Da die Beschleunigungsspannung höchstens 300 V betrug und die ursprüngliche thermische Energie der Elektronen gegenüber der kinetischen Energie sehr klein ist, kann die Maximalenergie von 300 eV nicht wesentlich überschritten werden und die Geschwindigkeit liegt deshalb deutlich unter 10% der Lichtgeschwindigkeit. Man muss deshalb bei allen folgenden Betrachtungen keine relativistischen Effekte berücksichtigen!

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man $\frac{e}{m} = \frac{2\ U_0}{B^2\ r^2}$ (3).

Folgende Tabelle enthält die Kreisradien der verschiedenen durchgeführten Messungen, sowie die errechneten Unsicherheiten (die genauen Formeln sind weiter unten wiedergegeben) und schließlich auch den Wert von e/m und dessen Unsicherheit.

Spannung [V]	$150 \pm 10\,\mathrm{V}$	$180 \pm 10\,\mathrm{V}$	$210 \pm 10\,\mathrm{V}$	$240 \pm 10\,\mathrm{V}$	$300 \pm 10\,\mathrm{V}$
Strom [A]	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
Radius 1 [cm]	3,87	3,97	4,70	4,63	5,52
Radius 2 [cm]	4,21	4,03	4,54	4,55	5,46
Radius 3 [cm]	3,84	4,00	4,54	4,67	5,47
Radius 4 [cm]	3,81	3,99	4,45	4,63	5,37
Radius 5 [cm]	3,59	4,20	4,50	4,62	5,49
Mittelwert [cm]	3,86	4,03	4,55	4,62	5,46
Statistische Messunsicherheit [cm] (A)	0,11	0,05	0,05	0,02	0,03
Apparative Messunsicherheit [cm] (B)	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
Gesamte Messunsicherheit [cm] (C)	0,23	0,21	0,21	0,20	0,20
e/m [10^{11} C / kg] (D)	$1{,}47 \pm 0{,}27$	$1{,}62 \pm 0{,}27$	$1{,}49 \pm 0{,}24$	$1{,}65 \pm 0{,}26$	$1{,}47 \pm 0{,}22$

Erläuterungen zur obigen Tabelle:

(A) Die statistische Messunsicherheit $u_{r,s}$ des Radius ergibt sich aus der Standardabweichung S_r der fünf aufgenommenen Messwerte: $u_{r,s} = 0{,}51 \cdot S_r$

(B) Die apparative Messunsicherheit $u_{r,a}$ ist der Ablesefehler von 2 mm. Der Fehler der Noniusskala ist zu vernachlässigen.

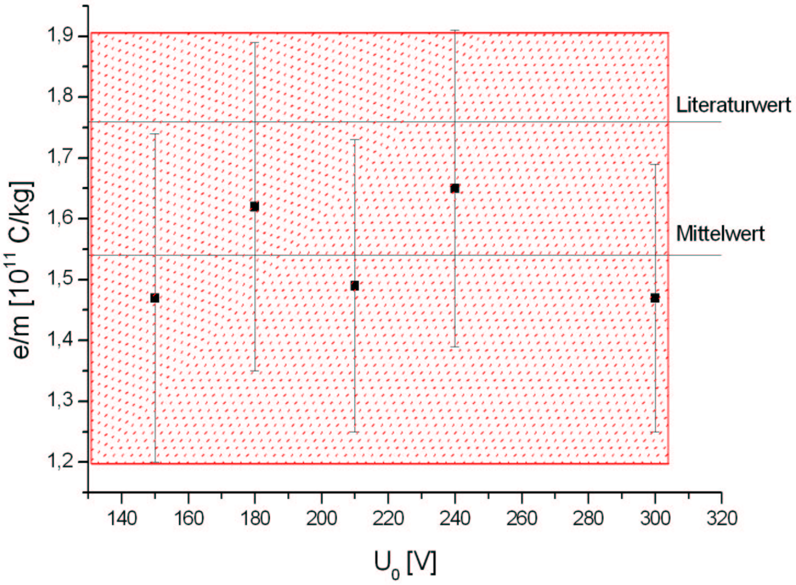
(C) Die gesamte Messunsicherheit des Radius ergibt sich als $u_r = \sqrt{u_{r,s}^2 + u_{r,a}^2}$

(D) Den Mittelwert von e/m bestimmten wir mit Formel (3).

Die Messunsicherheit von e/m ergibt sich durch die Fortpflanzung der weiter oben erwähnten Unsicherheiten wie folgt:

$$u_{(e/m)} = \sqrt{\left(\frac{u_{U_0}}{\overline{U_0}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{u_B}{\overline{B}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{u_r}{\overline{r}}\right)^2} \cdot \overline{(e/m)}$$

Im folgenden Diagramm sind die ermittelten Werte von e/m und ihre Unsicherheiten über U_0 aufgetragen. Der schraffierte Bereich gibt die grafisch ermittelte Messunsicherheit von e/m wieder.



Im Mittel ergibt sich e/m zu: $1{,}54 \pm 0{,}35 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$

Der Literaturwert von $1{,}76 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ liegt um 14% höher, jedoch noch innerhalb der Messunsicherheit. Die große Unsicherheit resultiert hauptsächlich aus der ungenauen Höhenmessung. Die Problematik dieser Messmethode zeigte sich auch an den alternierend auftretenden Werten von e/m von $\sim 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ bzw. $\sim 1{,}6 \cdot 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$ über die verschiedenen Messreihen. Dieses Verhalten deckt sich exakt mit dem Wechsel des Ablesenden, obwohl wir uns zuvor extra über das Problem unterhalten hatten und versuchten auf die „gleiche" Art und Weise abzulesen. Hätten wir den Innendurchmesser der Elektronenbahn bestimmt, so wären wir auf 1–2 mm kleinere Radien und somit auf einen wesentlich besseren Wert für e/m gekommen.

4 Fragen

4.1 Welche anderen experimentellen Möglichkeiten kennen Sie, um die spezifische Elektronenladung zu bestimmen?

Methode von Thomson: Elektronen werden in einem elektrischen Längsfeld beschleunigt, durchlaufen ein elektrisches Querfeld, und treffen dann auf einem Leuchtschirm auf. Aus der Ablenkung, die die Elektronen im Querfeld erfahren, kann man die spezifische Ladung berechnen.

Versuch von Tolman: In schnell rotierenden Metallteilen sorgt die Zentrifugalkraft dafür, dass die freien Elektronen nach außen beschleunigt werden, was zu einer Ladungstrennung führt. Es stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der Ladungstrennung und dem dadurch entstandenen Gegenfeld ein: $m\,a = e\,E$. Löst man nach e/m auf, kann man die spezifische Ladung berechnen.

4.2 Wie schaut die Elektronenbahn aus, wenn $\vec{v}$ nicht senkrecht auf $\vec{B}$ steht? Wann können Sie diese Erscheinung im Experiment sehen?

Die Elektronenbahn sieht dann schraubenförmig aus; $\vec{v}$ zerfällt dann nämlich in eine Komponente senkrecht zu $\vec{B}$, die die Lorentzkraft und damit die Kreisbahn bewirkt, und eine Komponente parallel zu $\vec{B}$, die keine Lorentzkraft bewirkt (diese Geschwindigkeitskomponente bleibt konstant). Die Überlagerung der Kreisbahn mit der parallelen Geschwindigkeitskomponente ergibt eine Spiralbahn.

Im Experiment sehen kann man diesen Effekt, wenn man den Glaskolben dreht (Drehachse nicht parallel zur Spulenachse; Kolben ist um die Längsachse drehbar). Dann treten die Elektronen nicht mehr senkrecht zum Magnetfeld aus der Glühkathode aus.

4.3 Warum können Sie die Elektronenbahn sehen? Welche Erklärung können sie dafür geben? Warum steht der Wasserstoff unter solch einem geringen Druck?

Die Elektronen kollidieren mit den Wasserstoff−Molekülen und regen sie an (dabei werden die Elektronen abgebremst und abgelenkt). Beim Wechsel zurück in den Grundzustand wird die Anregungsenergie in Form von Photonen wieder abgegeben, und das ist das Licht, das man sieht. Solche Stöße müssen in einer gewissen Häufigkeit vorkommen, damit man den Strahl sehen kann, daher darf im Glaskolben kein absolutes Vakuum sein, sondern es muss sich ein Gas darin befinden, das bei Anregung Photonen im sichtbaren Bereich aussendet (Wasserstoff: Balmer−Linien). Wäre der Druck allerdings deutlich höher, wären Kollisionen mit Gasmolekülen deutlich häufiger, die Lichtintensität wäre höher, aber es gingen auch mehr Elektronen im Strahl durch die Kollisionen „verloren“: Nur noch wenige Elektronen würden die komplette Kreisbahn schaffen, man sähe nur einen Kreisbogen.

4.4 Diskutieren Sie ausführlich den Einfluss des Erdmagnetfeldes! Wie müsste man vor−gehen um diesen Effekt nachzuweisen (Tip: Drehung der Grundplatte um 180°)? Wel−chen maximalen Effekt kann man erwarten? Könnte man diesen mit dem vorliegenden Versuchsaufbau nachweisen (Fehler)?

Das Erdmagnetfeld ist mit einer Stärke von etwa 0,030 mT nur knapp zwei Größenordnungen schwächer als das Feld der Helmholtzspulen (1,17 mT), daher müsste es einen auf jeden Fall messbaren Einfluss haben.

Die Berechnung dieses Einflusses ist aber nicht ganz einfach, weil 1. das Erdmagnetfeld nicht an allen Orten gleich ist (Grund: Unregelmäßigkeiten im Erdboden, Einfluss des Gebäudes usw.), 2. sich die Stärke des Erdmagnetfelds im Laufe der Jahre ändert, 3. die Richtung der Feldlinien ebenfalls nicht konstant ist (die magnetischen Pole wandern langsam).

Um den Einfluss des Erdmagnetfelds nachzuweisen, müsste man die Messung mit einer um 180° gedrehten Versuchsanordnung wiederholen, damit das Erdmagnetfeld aus entgegengesetzter Richtung einwirkt, und den Mittelwert aus den Ergebnissen bilden. Die Differenz zwischen den Messergebnissen und dem Mittelwert entspricht dem Einfluss des Erdmagnetfelds.

Den maximalen Effekt auf das Messergebnis kann man erwarten, wenn das Helmholtzspulenpaar in Nord−Süd−Richtung steht, also die Spulen und die Horizontalkomponente der Erdmagnetfeldlinien in gleiche Richtung zeigen. Dann addiert sich das Erdmagnetfeld zum Feld der Helmholtzspulen, die Messergebnisse werden verfälscht. In den Praktikumsräumen stehen die Spulen aber ungefähr in Ost−West−Richtung, d.h. nur eine sehr kleine Feldlinienkomponente verläuft in Spulenrichtung. Die Komponente senkrecht zu den Spulen und zu den Elektronen bewirkt dagegen lediglich eine Schraubenbahn der Elektronen, die man durch Drehen des Kolbens einfach kompensieren kann.

Das Erdmagnetfeld beträgt ca. 2,6 % des Felds der Helmholtzspulen. Weil in der Formel das Magnetfeld quadratisch eingeht (s.o.), wird die spezifische Elektronenladung um bis zu 6,6 % verfälscht – dieser Wert liegt jedoch innerhalb der Messunsicherheit unserer Messung, und ist deshalb vernachlässigbar.