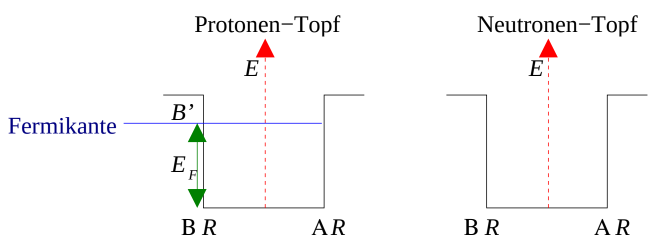
6 Kern-Modelle

6.1 Das Fermi-Gas-Modell

Die Bethe-Weizsäcker'sche Massenformel $M_{atom}(A, Z)$ findet ihre Erklärung im **Tröpfchenmodell** des Atomkerns. Die Parameter der einzelnen Terme $(a_r, a_s, a_{sym}, \ldots)$ stammen vor allem aus Beobachtungen und Messungen. Dieses Modell gibt kaum Einblicke in Struktur und Dynamik des Atomkerns. Viele Eigenschaften vn Atomkernen sind besser in einem **Einteilchen-Modell** zu verstehen.

Grundannahme: Nukleonen bewegen sich im Kern uanabhängig von einander (keineswegs selbstverständlich!)

Einfachste Version eines Einteilchen-Modells: **Fermigas-Modell**
Nukleonen bewegen sich **frei** innerhalb des Kernvolumens. Dort spüren sie ein konstantes, attraktives mittleres Potential (verursacht von der NN-Wechselwirkung).



Zahl der Zustände, die ein Nukleon in einem Volumen V im Impulsintervall $[p,\, p + dp]$ einnehmen kann:

$$dn = \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

Nukleonen (Protonen/Neutronen) haben Spin 1/2, sind sogenannte Fermionen, die Pauliprinzip gehorchen..

Jeder Zustand kann nur einmal besetzt werden

$\Rightarrow$ Im Grundzustand des Kerns werden die niedrigsten Energiezustände bis zu einem Maximalimpuls, dem sog. Fermi-Impuls p_f , besetzt sein.
Gesamtzahl der Zustände

$$n = \int_0^{p_f} dp \frac{dn}{dp} = \frac{V p_f^3}{6\pi^2\hbar^3}$$

Nun kann noch jeder Impulszustand spin $\uparrow$ oder spin $\downarrow$ tragen. (Faktor 2)
Zahl der Neutronen bzw. Protonen

$$N = \frac{V(p_f^{(n)})^3}{3\pi^2\hbar^3},\ Z = \frac{V(p_f^{(p)})^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

mit $p_f^{(n)}$ und $p_f^{(p)}$, den Fermi-Impulsen der Protonen/Neutronen.

Das Kernvolumen $V = \frac{4\pi}{3} R_0^3 A$ mit $R_0 = 1,21 fm$. Damit erhält man für einen Kern mit $N = Z = A/Z$ und gleichem Radius der p/n -Potentialtöpfe

$$P_f = p_f^{(p)} = p_f^{(n)} = (3\pi^2\hbar^3 \frac{A}{2V})^{1/3} = \frac{\hbar}{2R_0}(9\pi)^{1/3} = \frac{1,52\hbar}{R_0} \approx 250 MeV/c$$

Nukleonen können sich demnach im Kern mit großem Impuls frei bewegen.
Die kinetische Energie des höchsten bsetzten Zustand beträgt

$$E_f = \frac{p_f^2}{2M} \approx 33MeV$$

und heisst Fermi-Energie ($M = 939MeV/c^2$ Nukleonmasse)

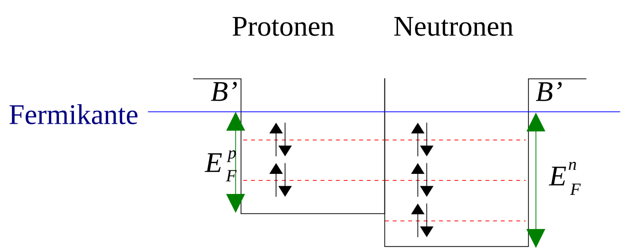
Die Differenz B' zwischen der Oberkante des Potentialtopfs und der Energie an der Fermi-Kante ist für die meisten konstant und beträgt $7 - 8MeV$.

$->$ Tiefe des Potentialtopfs $V_0 = E_f + B' = 40MeV$ ist in guter Näherung unabhängig von der Massenzahl. Ähnlich wie beim Elektronengas in Metallen liegt im Kern ein **Nukleongas** vor, dessen kinetische Energie vergleichbar mit der Potentialtiefe ist. Kerne sind **relativ schwach gebundene** Systeme!

Bemerke:Beim Einbringen von mehr Nukleonen bleiben V_0, p_f, E_k sowie die Dichte $\rho = 2p_f^3/3\pi^2\hbar^3$ **konstant**. Es wächst proportional zu A das Kernvolumen, so dass Platz für mehr Zustände entsteht: $A = V \cdot 2p_f^3/3\pi^2\hbar^3$

Asymmetrie-Energie im Fermigas-Modell Schwere Kerne besitzen **Neutronenüberschuss:**
$N > Z \Rightarrow p_f^{(n)} > p_f^{(p)}$, $E_f^n > E_f^p$
Für stabile Kerne müssen die Fermi-Kanten der Protonen und Neutronen auf gleichem Niveau liegen, sonst würde eine Kernumwandlung durch β -Zerfall zu einem energetisch günstigerem Zustand führen.
$\Rightarrow$ Tiefe des p-Topfs geringer als die des Neutronen-Topfs.

Coulombabstoßung der Protonen ist dafür verantwortlich.
$V_c = (Z-1)\frac{\alpha\hbar c}{R}$



p/n -Töpfe liegen räumlich übereinander.

Betrachte Abhängigkeit der Bindungsenergie vom Neutronenüberschuss $N - Z$:
mittlere kinetische Energie pro Nukleon

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{\int_0^{p_f} dp\, p^2 E_{kin}(p)}{\int_0^{p_f} dp\, p^2} = \frac{3}{p_{f^3}} \frac{1}{2M} \frac{p_f^5}{5} = \frac{3p_f^2}{10M} = \frac{3}{5} E_k$$

Gesamte kinetische Energie des Kerns

$$E_{kin}(N.Z) = N\langle E_{kin}^n \rangle + Z\langle E_{kin}^p \rangle = \frac{3}{10M}[N(p_f^n)^2 + N(p_f^p)^2]$$

Fermi-Impulse gegeben durch Dichten:

$$p_f^n = (3\pi^2\hbar^3 \frac{N}{v})^{1/3} = \frac{\hbar}{R_o}(\frac{9\pi}{4})^{1/3}(\frac{N}{A})^{1/3}$$

entsprechend

$$p_f^p = \frac{\hbar}{R_0}(\frac{9\pi}{4})^{1/3}(\frac{Z}{A})^{1/3}$$

Dies ergibt:

$$E_{kin}(N,Z) = \frac{3\hbar^2}{10MR_0^2}(\frac{9\pi}{4})^{2/3}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Entwickle dies bei festem A in $N - Z = \Delta$

$$\frac{3\hbar^2}{10MR_0^2}(\frac{9\pi}{4})^{2/3}A^{-2/3}[(\frac{A+\Delta}{2})^{5/3} + (\frac{A-\Delta}{2})^{5/3}] = \frac{3\hbar^2}{10MR_0^2}(\frac{9\pi}{8})^{2/3}\{A + \frac{5}{9}\frac{(N-Z)^2}{A}\}$$

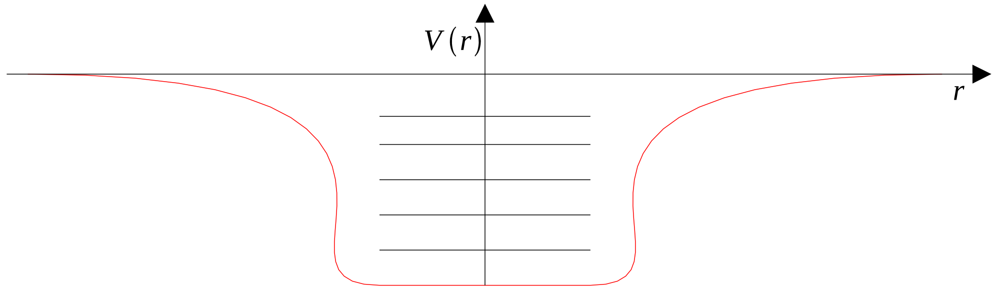
$\frac{1}{4}a_{sym} = \frac{5}{9}\langle E_{kin}\rangle = \frac{p_f^2}{6M} = \frac{E_f}{3} \approx 11MeV$ entspricht der Hälfte des empirischen Werts von $a_{sym} = 93,15MeV$

6.2 Das Schalenmodell des Atomkerns

Empirische Hinweise auf Schalenstruktur im Atomkern.
"**Magische" Zahlen**: 2,8,20,28,50,82,126,...

Wenn Neutronzahl N oder Protonzahl Z eine magische Zahl ist, ist der entsprechende Kern besonders stabil.

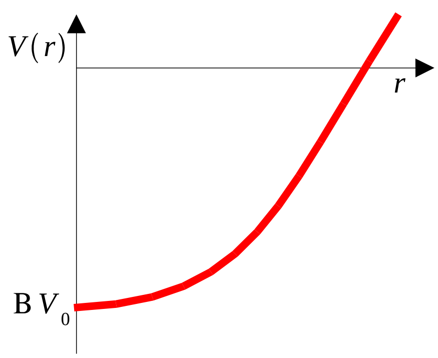
- große Seperationsenergie für ein Nukleon
- Fügt man weiteres Nukleon hinzu, so ist dessen Separationsenergie wesentlich kleiner. Analog zu e^- in Atomhülle:
  - Edelgase: große Ionisierungsenergie
  - Alkalimetalle: kleine Ionisierungsebergie
- Ist Z oder N eine magische Zahl, so gibt es besonders viele stabile Kerne
  - 6 Kerne mit $N = 50$, 7 Kerne mit $N = 82$
  - ${}_{Z=50}Sn$ hat 10 natürlich vorkommende Isotope
  - Außergewöhnlich stabil: doppelt magische Kerne
    ${}^4_2He$, ${}^{16}_8O$, ${}^{40}_{20}Ca$, ${}^{48}_{20}Ca$, ${}^{208}_{82}Pb$



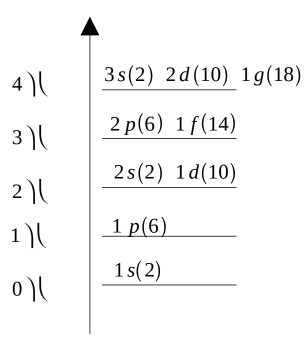
- Nukleonen bewegen sich in mittleren (sphärischen) Kernpotential
- Besetzung der Einteilchenniveaus gemäß Pauliprinzip
- mittleres Kernpotential wird selbstkonsistent durch NN-Wechselwirkung erzeugt
  NN-Wechselwirkung ist kurzreichweiti

  $$\rightarrow V(r) \sim \varrho(r)$$

  $\varrho(r)$ ist die Nukleonendichte.
- Gebundene Zustände im sphärischen Potentialtopf
  Wellenfunktion: $\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ (Kugelflächenfunktion)
  $n = 1, 2, 3, \ldots \text{Zahl der Knoten} - 1$, Hauptquantenzahl
  $l = 0, 1, 2, 3$ Bahndrehimpulsquantenzahl
  $= s, p, d, f$
- Entartung von E_{nl} ist $2(2l + 1)$
- Harmonischer Oszillator



- $V(r) = -V_0(1 - \frac{r^2}{R^2})$
  $\frac{m}{2}\omega^2 = \frac{V_0}{R}$
  $E_{nl} = -V_0 + \hbar\omega(\underbrace{n_x + n_y + n_z}_{2(n-1)+l} + \frac{3}{2}) = -V_0 + \hbar\omega(2n + l - \frac{1}{2})$

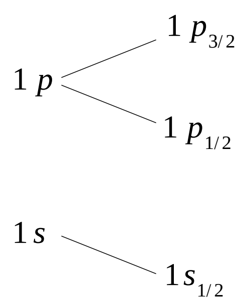


- Realistischer: Woods-Saxon Potential

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$

V_0 : Potentialtiefe, R : “Kernradius”, a :Randunschärfe
$V_0 = 51\, MeV$, $R = 1,27\, fm \cdot A^{1/3}$,$a = 0,67\, fm$
$\rightarrow$ Die ersten drei magischen Zahlen (2,8,20) können erklärt werden, die restlichen **nicht**!

- Grundlegende Idee von Mayer-Goeppent, jensen Haxel und Suess (1949), Nobelpreis (1963). Wechselwirkungsenergie zwischen **Spin** und **Bahndrehimpuls** der Nukleonen ist entscheidend.
Spin-Bahn-Kopplung
Atomhülle: Spin-Bahn-Wechselwirkung $\rightarrow$ Feinstrukturaufspaltung



- Aufspaltung ist kleiner Effekt: $\propto \alpha^2$, $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137{,}036}$

Mittleres Kernpotential

$$V_{\text{Kern}}(r) = V_c(r) + V_{ls}(r) \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}$$

- $\vec{l} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$ Bahndrehimpuls

- $\vec{s} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ Nukleonen-Spin

Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + s$ ist die Erhaltungsgröße $[V_{\text{Kern}}(r), \vec{j}] = 0$
Quantenzahl $j = l \pm 1/2$
Zustände gekennzeichnet durch $nljm_j$ Entartung von E_{nje} ist $2j + 1$

- $\vec{l}\vec{s} = \frac{1}{2}[\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] =$
$l/2$ für $j = l + 1/2$
$-(l+1)/2$ für $j = l - 1/2$
Spin-Bahnaufspaltung **wächst** mit l : $\Delta E_{ls} = (l + 1/2)\langle V_{ls}(r)\rangle$

- Im Atomkern sind die Verhältnisse umgekehrt zu denen in der Atomhülle

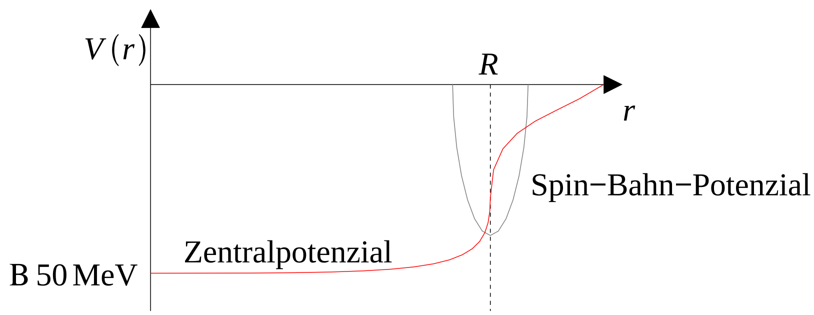
  - Zustand mit $j = l + 1/2$ wird abgesenkt.
    Zustand mit $j = l - 1/2$ wird angehoben.
    $\langle V_{ls}(r)\rangle_{\text{Kern}} < 0$

- Spin-Bahnaufspaltung ist groß, beeinflusst wesentlich die Niveaufolge
  z.B: Zustand $1f_{7/2}$ wird stark abgesenkt
  $\rightarrow$ magische Zahl 28

- Empirische Parameterisierung des Spin-Bahn-Potentials

$$V_{ls}(r) = \tilde{U}_{ls}\frac{1}{r}\frac{df(r)}{dr},\ f(r) = \frac{\varrho(r)}{\varrho(0)} = \frac{1}{1+e^{(r-R)/a}}$$

  $\tilde{U}_{ls}$: Stärkeparameter $\simeq 35\,MeV\,fm^2$



- Schematisches Schalenmodell Potential

6.3 Einfache Vorhersagen des Schalenmodells

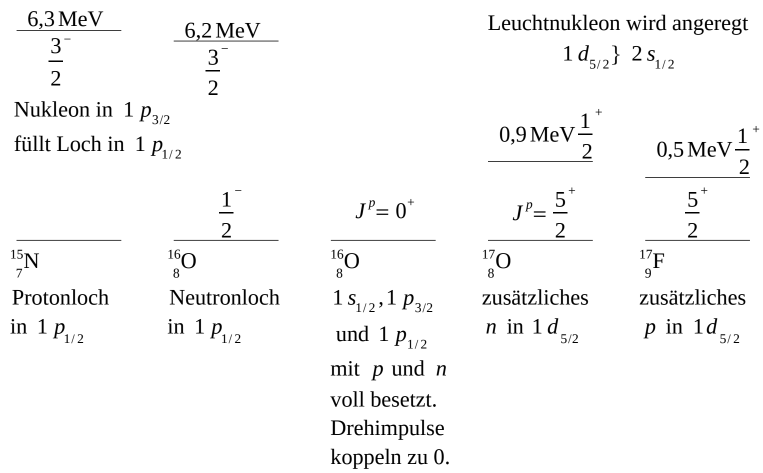
Annahmen: zentralsymmetrisches mittleres Potential, Restwechselwirkungen der Nukleonen vernachlässigbar. Anwendbar auf sphärische Kerne in der Nähe von Schalenabschlüssen.
Einteilchen- und Ein-Lochzustände können wesentliche Kerneigenschaften beschreiben.

Beispiele:

- $^{35}_{16}S_{19}$
  $p:\ 1s_{1/2},\ 1p_{3/2},\ 1p_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 2s_{1/2}$ gefüllt
  $n:\ 1s_{1/2},\ 1p_{3/2},\ 1p_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 2s_{1/2}$ gefüllt
  $1d_{3/2}$ -Schale hat ein **Neutronenloch.**
  Grundzustand $J^p = \frac{3}{2}^+$

- $^{87}_{38}Sr_{49}$
  $p:\ 1s_{1/2},\ 1p_{3/2},\ 1p_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 2s_{1/2},\ 1d_{3/2},\ 1f_{7/2},\ 2p_{3/2},\ 1f_{5/2}$ gefüllt
  $n:\ 1s_{1/2},\ 1p_{3/2},\ 1p_{1/2},\ 1d_{5/2},\ 2s_{1/2},\ 1d_{3/2},\ 1f_{7/2},\ 2p_{3/2},\ 1f_{5/2},\ 2p_{1/2}$ gefüllt
  $1g_{9/2}$-Schale hat ein **Neutronenloch.**
  Grundzustand $J^p = \frac{9}{2}^+$

- $^{41}_{20}Ca$
  $p:\ 1s_{1/2} - 1d_{3/2}$ gefüllt
  $n:\ 1s_{1/2} - 1d_{3/2}$ gefüllt
  einzelnes Neutron in $1f_{7/2}$
  Grundzustand $J^p = \frac{7}{2}^-$



Spiegelkerne um ${}^{16}_{8}O$

Magnetische Momente der Kerne Die Spins und Bahndrehimpulse der Nukleonen einer gefüllten j-Schale koppeln zu Null.
$\rightarrow$ Drehimpuls und magnetisches Moment des Kerns wird vom "Leucht"-Nukleon. (bzw. von Nukleon-Loch) bestimmt.

$$\hat{\mu}_{Kern} = g_e\vec{l} + g_s\vec{s}$$

gyromagnetische Faktoren

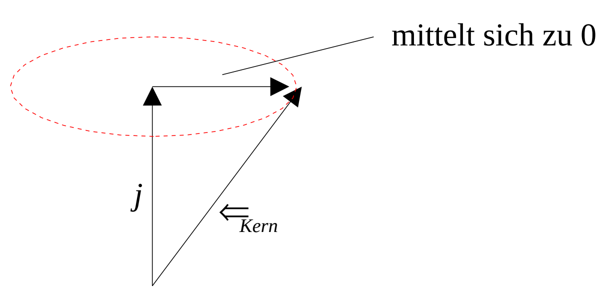
$$g_e = \begin{cases} 1\,\text{Proton} \\ 0\,\text{Neutron} \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5,58 \\ -3,82 \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} \text{Proton} \\ \text{Neutron} \end{matrix}$$

$\mu_{Kern} = \langle jj|\hat{\mu}_{Kern,z}|jj\rangle = g_{Kern}\langle jj|jz|jj\rangle = g_{Kern\cdot j}$

Vektorprojektions-Theorem:

$$g_{Kern} = \frac{\langle jj|\vec{\mu}_{kern}\cdot\vec{j}|jj\rangle}{\langle jj|\vec{j}^2|jj\rangle}$$



Benutze:
$2\vec{l}\vec{j} = \vec{j}^2 + \vec{l}^2 - \vec{s}^2$
$2\vec{s}\vec{j} = \vec{j}^2 + s^2 - \vec{l}^2$
Damit ergibt sich:

$$g_{\text{Kern}} = \frac{1}{2}(g_e + g_s) + \frac{1}{2}(g_e - g_s)\frac{l(l+1) - s(s+1)}{j(j+1)}$$

Werte dies getrennt aus:
$j = l + \frac{1}{2}: \ \frac{l(l+1)-3/4}{(l+1/2)(l+3/2)} = 1 - \frac{2}{2l+1}$
$j = l - \frac{1}{2}: \ \frac{l(l+1)-3/4}{(l-1/2)(l+1/2)} = 1 + \frac{2}{2l+1}$
$g_{\text{Kern}} = g_e \pm \frac{g_s+g_e}{2l+1}$ für $j = l \pm 1/2$ (Schmidt'sche Linien)

Kern	Grundzustand	J^P	Schalenmodell	Experiment
$^{15}_{7}N$	$p - 1p_{1/2}1$	$\frac{1}{2}^-$	$-0,264$	$-0,283$
$^{15}_{8}O$	$n - 1p_{1/2}1$	$\frac{1}{2}^-$	$+0,638$	$+0,719$
$^{17}_{8}O$	$n - 1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$-1,913$	$-1,894$
$^{17}_{9}F$	$p - 1d_{5/2}$	$\frac{5}{2}^+$	$4,722$	$+4,793$

6.4 Messung magnetischer Momente von Kernen

Zwei prinzipielle Methoden:

- WW des Kernmoments mit inneren Atom- oder Molekülfeldern
- WW des Kernmoments mit äußeren Magnetfeldern

6.4.1 Hyperfeinstruktur(HFS)aufspaltung im Magnetfeld der Atomhülle

Drehimpulse $\vec{J}_A$ von Atomhülle und $\vec{J}_K$ von Kern koppeln zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{F} = \vec{J}_A + \vec{J}_K$$

F-Quantenzahl kann Werte $J_A + J_K,\ J_A + J_K - 1, \ldots, |J_A - J_K|$annehmen.
$\rightarrow 2\,J_K + 1$ Kopplungsmöglichkeiten für $J_A \geq J_K$
$\rightarrow 2\,J_A + 1$ Kopplungsmöglichkeiten für $J_K \geq J_A$

Energieniveaus des Atoms

$$E_{J_A,J_K} = E_{J_A + \Delta E_{HFS}}$$

E_{J_A} : Energieniveau der Elektronenhülle

$$\Delta E_{HFS} = -\vec{\mu}_K \cdot \vec{B}_A$$

$$\vec{B}_A = -a \frac{\vec{J}_A}{\left|\vec{J}_A\right|}$$

$\vec{B}_A$: Magnetfeld der Hüle am

$$\vec{\mu}_K = g_K \mu_N \frac{\vec{J}_K}{\hbar}$$

$$\rightarrow \Delta E_{HFS} = a\, g_K\, \mu_N \frac{\vec{J}_A \cdot \vec{J}_K}{\hbar\, |J_A|}$$

Bestimmung des Magnetischen Moments am Kern erfordert die Bestimmung von B_A.

6.4.2 HFS-Aufspaltung im äußeren Magnetfeld

Beispiel: $J_A = \frac{1}{2}$, $J_K = \frac{3}{2}$

b) $\vec{\mu}_A \cdot \vec{B} \ll \vec{\mu}_K \cdot \vec{B}_A$

c) $\vec{\mu}_A \cdot \vec{B} \gg \vec{\mu}_K \cdot \vec{B}_A$

Paschen-Back-Effekt / entkoppelte Einzeldrehimpulse

$$\Delta E_{HFS} \to -g_K \mu_N B m_{J_K}$$

d.h. Magnetfeld der Hülle spielt keine Rolle mehr!
$\Rightarrow \frac{\delta_{g_K}}{g_K} \to 0,1\%$, sprich deutlich genauer!

6.4.3 Molekülstrahlmethode

a) Stern-Gerlach-Effsekt ablenkende Kraft: $F_Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\mu} \cdot \vec{B}\right) = (\vec{\mu}_K + \vec{\mu}_A)\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$
$\hookrightarrow$ Messung von Kernmomenten erfordert diamagnetische Atomhülle (ansonsten wird der Effekt durch $\vec{\mu}_A$ dominiert).
Problem: geringe Ablenkung des Strahls
z.B.: H_2 -Moleküle (Stern, Frisch, Estermann 1933) für eine erste Bestimmung von μ_K des Protons
$\frac{\partial B}{\partial z} = 800$ Tm^{-1} , Flugweg: $1,5$ m, Strahlablenkung: 10^{-2} mm
$\hookrightarrow$ recht ungenaue Methode.

b) Kernresonanz

- Potentielle Energie des Kernmoments im äußeren Feld $\vec{B}$, $V = -\vec{\mu}_k \cdot \vec{B}$ hat Eigenwerte: $-g_K \mu_N B m_K$
- $|\Delta E| = g_K \mu_N B$
- Übergänge durch Einstrahlung von magnetischem hf-Feld $\perp \vec{B}$ mit $\hbar\omega = |\Delta E|$
  $\Rightarrow \omega_{res} = \frac{g_K \mu_N}{\hbar} B =: \gamma B$ gyromagnetisches Verhältnis
  ω_{res} ist gleich der Lamorfrequenz ω_L des Kerns im Feld B.

- Atomstrahlresonanz nach Rabi

6.4.4 Kernresonanz in flüssigen und festen Proben

6.5 Isospin von Atomkernen

Kozept des Isospins Proton und Neutron sind **zwei Zustände** eines Teilchens, des Nukleons
$\to$ analog zu spin-up und spin-down
$|p\rangle \hat{=} |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|n\rangle \hat{=} |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Isospin-Operatoren $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$
$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
formal identisch mit Pauli-Spin-Matrizen $\vec{\sigma}$.
$\vec{t} = \frac{\vec{\tau}}{2}$
$t_3 |p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle$, $t_3 |n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$

$\vec{t}^2 \left|p\right\rangle = \frac{3}{4}\left|p\right\rangle$, $\vec{t}^2 \left|n\right\rangle = \frac{3}{4}\left|n\right\rangle$
Das Nukleon hat Isospin $T = \frac{1}{2}$(Isospin-doublett)

Isospin-Invarianz der starken Wechselwirkung $\left[H_{\text{stark}}, \vec{\tau}\right] = 0$

Unter Austausch von Protonen und Neutronen bleibt die starke Wechselwirkung gleich.

Elektromagnetische Wechselwirkung bricht (leicht) Isospin-Symmetrie $\rightarrow$ analog zum Spin im äusseren Magnetfeld.

$\rightarrow$ **Atomkern**:

$$\left.\begin{array}{c} \text{Proton} : T = \frac{1}{2}, T_3 = +\frac{1}{2} \\ \text{Neutron} : T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} \text{Isospin}- \\ \text{quantenzahlen} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Nukleon ist} \\ \text{Isospin} - \text{Dublett} \end{array}$$

Ein Kern mit Z Protonen und N Neutronen (somit Massenzahl A=N+Z) hat $T_3 = \frac{1}{2}(Z - N)$ (T_3 ist additiv)

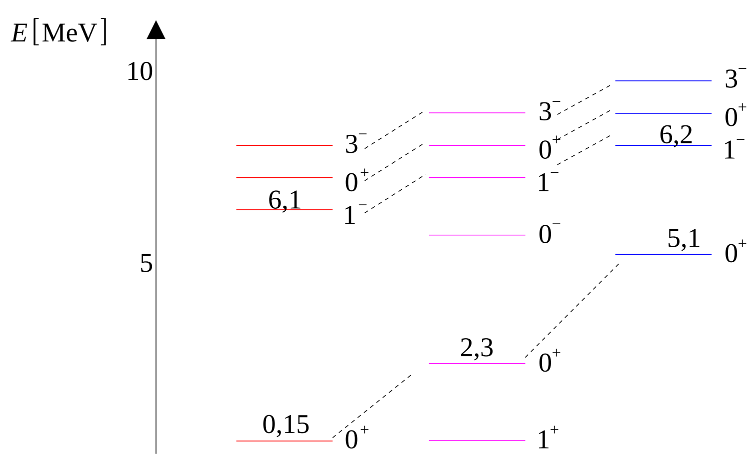
Was ist der Gesamt-Isospin T des Kerns?
$\frac{|N-Z|}{Z} \leq T \leq \underbrace{\frac{A}{z} = \frac{N+Z}{Z}}_{\text{Maximalwert}}$

Bei Abschalten der elementaren Coulomb Wechselwirkung und des Proton-Neutron-Massenunterschieds $(1,3$ MeV$)$ wird die Isospin-Symmetrie **exakt**.

$\rightarrow$ Ein Kerntzustand (Energieniveau) mit Gesamt-Isospin T ist $(ZT + 1)$ -fach entartet und sollte in isobaren Kernen ($A = N + Z$ gleich, $N - Z$ verschieden) auftreten.

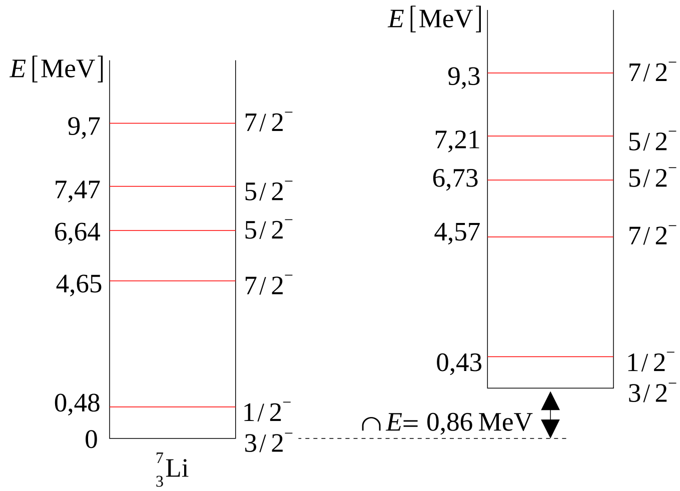
Solche Isospin-Multipletts nennt man **isobare Analogzustände**.

Beispiele:

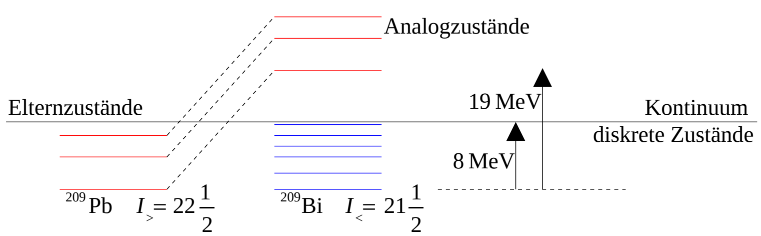


- Grundzustand von $^{14}_{7}N$ mit $J^P = 1^+$ ist ein Isospin-Singulett ($T = 0$). Andernfalls gäbe es in $^{14}_{6}C$ einen aufgrund der geringeren Coulombenergie tieferligenden 1^+ -Zustand.

- $^{14}_{6}C$ und $^{14}_{8}O$ haben $T_3 = -1$ und $T_3 = 1$. Ihre 0^+ -Grundzustände bilden zusammen mit dem ersten angeregten Zustand in $^{14}_{7}N$ ($T_3 = 0$) ein Isospin-Triplett.



- Der Grundzustand und die ersten fünf angeregten Zustände von ${}^7_3Li$ und ${}^7_4Be$ bilden **Isospin-Dubletts.**
- Bei schweren Kernen liegen solche (bzgl. Isospin entartete) Zustände oft im Kontinuum **Isobare Analog-Resonanzen**



- $p +^{208}_{82} Pb \rightarrow^{209}_{83} Bi^* \rightarrow p +^{208}_{82} Pb^*$

6.6 Deformierte Kerne

- Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelsymmetrisch
- Weit weg von abgeschlossenen Schalen (d.h. halbgefüllten Scahlen) polarisieren Nukleonen den Kernrumpf. Das mittlere Kernpotential ist nicht mehr kugelsymmetrisch und die Kerne sind deformiert.
  Quadrupolmoment (aus Atomspektroskopie)
  $$Q = \int d^3r(3z^2 - r^2)$$
  Ellipsoid mit Halbachsen in z-Richtung und zwei gleichen Halbachsen b und $\rho(\vec{r}) =$ konstant.
  $$Q = \frac{2}{5}Z(a^2 - b^2)$$

mittlerer Radius

$$\langle R\rangle =^{3\sqrt{ab^2}}$$

Differenz

$$\Delta R = a - b$$

Deformationsparameter

$$\delta = \frac{\Delta R}{\langle R\rangle}$$

$$Q = \frac{4}{5} Z \langle R\rangle^2 \delta$$

wächst mit Kernladung und Kerngröße.
Besser geeignet zum Vergleich verschiedener Kerne: reduziertes Quadrupolmoment (direktes Maß für Deformation)

$$Q_{red} = \frac{Q}{Z \langle R\rangle^2} = \frac{4}{5}\delta$$

Betrachte einzelnes Proton ausserhalb abgeschlossener Schale

$$Q^{(P)} = -\left\langle r^2\right\rangle \frac{2j-1}{2(j+1)} = -Q^{(P-Loch)} \ (j \geq \frac{3}{2})$$

$$Q_{red}^{(P,P-Loch)} = \mp \frac{1}{Z} \text{(einige \%)}$$

Beispiele:

- ${}^{39}_{19}K$, $Z = 19$, $N = 20$
  doppeltmagisch plus Protonloch in $1d_{3/2}$ -Schale

$$Q^{(exp)}({}^{39}K) = 5,5 \text{ fm}^2,\ Q^{P-Loch} = 5,0 \text{ fm}^2$$

- ${}^{209}_{83}Bi$, $Z = 83$, $N = 126$
  doppeltmagisch plus Proton in $1h_{9/2}$-Schale

$$Q^{(exp)}({}^{209}Bi) = -35 \text{ fm}^2,\ Q^{(P)} = -30 \text{ fm}^2$$

- Empirischer Befund:
  - Kerndeformationen sehr klein in der Nähe von magischen Zahlen (abgeschlossene Schalen)
  - zwischen abgeschlossenen Schalen Q_{red} bis $0,4$. Die meisten großen Deformationen sind positiv
    prolate Deformation, (d.h. zigarrenförmige Kerne) besonders ausgeprägt bei Seltenen Erden (Lanthaniden)
    ${}^{176}_{71}Lu : Q_{red} = 0,24$, ${}^{176}_{68}Er : Q_{red} = +0,32$
  - in selteneren Fällen große negative Deformation
    oblate Deformation (d.h. linsenförmige Kerne)
    Transurane (Actiniden) ${}^{227}_{89}Ac : Q_{red} = -0,04$, ${}^{123}_{51}Sb : Q_{red} = -0,09$
    Ursache der Kerndeformation: Restwechselwirkung der Nukleonen in einer Schale
  - im Mittel herrscht zwischen Nukleonen eine anziehende Kraft
    in der Atomphysik ist es umgekehrt: Elektron-Elektron-Abstoßung $\Rightarrow$ Hundsche Regeln: besetze zuerst Ortspotentiale mit e^- , dann mit umgekehrtem Spin.
    * Nukleon mit gleicher Ortswellenfunktion gruppieren sich in Paare mit $J^P = 0^+$: $l_1 = l_2$, $m_1 = -m_2$, $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0$
      $\rightarrow$ dadurch gewinnen Kerne zusätzliche Stabilität

* Nukleonpaare besetzen bevorzugt Orbitale mit benachbarten m $\rightarrow$ Deformation

* Drehimpuls und Parität J^P der Kerne werden allgemein durch einzelene ungepaarte Nukleonen bestimmt.
  · doppeltgerade (gg)-Kerne haben $J^P = 0^+$ Grundzustand
  · einfachungerade (ug,gu)-Kerne: J^P durch leztes ungepaartes Nukleon bestimmt.
  · doppeltungerade (uu)-Kerne: J^P aus Kopplung von ungepaartem Proton und ungepaartem Neutron

Rotationszustände Permanent deformierte Kerne besitzen charakteristische Anregungsmuster: Serien von Zuständen mit wachsendem Drehimpuls deren energetischer Abstand linear zunimmt.

Rotationsbanden (analog zu Molekülen)
= kollektive Kernanregung, an der alle Nukleonen beteiligt sind.

Deformierte (gg)-Kerne mit Grundzustand $J^P = 0^+$ (innerer Drehimpuls ist Null)
Beispiele: ${}^{232}_{90}Th$, ${}^{238}_{92}U$, ${}^{238}_{94}Pu$, ${}^{170}_{72}Hf$, ${}^{120}_{54}Xe$, ${}^{182}_{74}W$, ${}^{170}_{70}Yb$, ${}^{156}_{66}Dy$, ...

wie symmetrischer Kreisel mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta \neq \Theta_3$

Bei quantenmechanischem System kann keine kollektive Rotation um eine Symmetrie-Achse auftreten.

$$J_{rot,3}\,|\text{axialsym. Zustand}\rangle = 0$$

$\rightarrow$ kollektive Rotation senkrecht zur Symmetrieachse
Hamiltonoperator der Rotation

$$H_{rot} = \frac{\vec{J}^2_{rot}}{2\Theta}$$

Energieeigenwerte

$$E_J = \frac{J(J+1)}{2\Theta}$$

Eigenfunktion: Kugelflächenfunktion Y_{JMj}: Aus Symmetriegründen sind bei 0^+-Grundzustand nur gerade $J = 0, 2, 4, \ldots$ erlaubt
Invarianz bei Spiegelung an 12 ; Faktor $(-1)^J$ von Y_{Jm}
$\rightarrow$ Energieabstand aufeinanderfolgender Rotationszustände

$$E_{j+2} - E_j = (2J+3)/\Theta$$

nimmt linear mit J zu.

Beispiel: ${}^{232}_{90}Th$

elektrische Quadrupolübergänge $\rightarrow$ beobachtet mittels γ -Spektroskopie

Erzeugung der Kernrotationszustände mittels Coulombanregung
Vorteil: reine elm. WW, keine inneren Anregungen des Kerns

$$E_{ans} < \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{R_1 + R_2}$$

Hochspin-Rekord: $J = 60$
prolatsuperdeformiert: 2:1:1

Fusionsreaktionen

$${}^{48}_{20}Ca +^{108}_{46} Pd \rightarrow^{156}_{66} Dy \rightarrow^{152}_{66} Dy + 4n$$

Drehimpuls se

$$J^{max} = (R_1 + R_2)\sqrt{2M_{red}E_{kin} = 180}$$

Experimentell beobachtet: $J^{max} = 60$

Trägheitsmoment