TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Abgabe am 4. Juli 2001
zu Beginn der Übung

Mathematik für Physiker 4

— Übungsblatt 7 —

Alle Aufgaben zählen 4 Punkte. Aufgabe 7.1 (c) gibt Zusatzpunkte.

7.1: Berechnen Sie das Integral $\int_K \mathrm{Im} z \, dz$, wobei

(a) K der Kreis um 0 mit Radius $r > 0$ ist.

(b) K das Quadrat mit Eckpunkten $l(1+i)$, $l(-1+i)$, $l(-1-i)$ und $l(1-i)$ ist, wobei $l > 0$.

(c)* Zeigen Sie für eine beliebige stückweise stetige, geschlossene, doppelpunktfreie Kurve $K \subset \mathbb{C}$, die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird,

$$\int_K \mathrm{Im} z \, dz = -\int_G dx\, dy$$

Hier bezeichnet G die von K umschlossene Menge, allerdings aufgefasst als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Aufgabe 9.3 aus dem letzten Semester) mit $Q(x,y) = 0$ und $P(x,y) = y$.

7.2: Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_j(z)$ in 0 komplex differenzierbar sind und bestimmen Sie $\int_K f_j(z)\, dz$, wobei K der Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $r > 0$ ist.

(a) $f_1(z) = \frac{z^2}{|z|}$ für $z \neq 0$ und $f_1(0) = 0$

(b) $f_2(z) = \frac{z^3}{|z|}$ für $z \neq 0$ und $f_2(0) = 0$

(c) $f_3(z) = \overline{z}$

(d) $f_4(z) = \mathrm{Im}^2 z$

7.3: Es sei $f(z)$ eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, für die gilt

$$f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Für $r > 0$ sei K_r die durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [0,\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & re^{it} \end{cases}$$

parametrisierte Kurve (Halbkreis).

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, daß

$$\int_{K_r} \frac{f(z)}{z}\, dz$$

nicht von r abhängt.

7.4: $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine zweimal stetig (reell) differenzierbare Funktion.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

(b) Folgern Sie aus (a): Ist f holomorph in $\mathbb{C}$, so sind $\mathrm{Re} f$ und $\mathrm{Im} f$ harmonische Funktionen, d.h. $\Delta \mathrm{Re} f = \Delta \mathrm{Im} f = 0$, wobei $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

(c) Folgern Sie aus (b) eine notwendige Bedingung an $a, b, c \in \mathbb{R}$, daß das reelle Polynom $ax^2 + bxy + cy^2$ der Realteil eines komplexen Polynoms ist. Zeigen Sie, daß diese Bedingung auch hinreichend ist und geben Sie ein solches komplexes Polynom an.

(d) Folgern Sie aus (b) eine notwendige Bedingung an $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, daß das reelle Polynom $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ der Realteil eines komplexen Polynoms ist.