TU München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. P. Giesl

Sommersemester 2001

Abgabe am 18. Juli 2001
zu Beginn der Übung

Mathematik für Physiker 4

— Übungsblatt 10 —

Alle Aufgaben zählen 4 Punkte.

10.1: (a) Entwickeln Sie $f(z) = e^z$ in eine Potenzreihe um $z_0 = \pi i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

(b) Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{(z-i)^3}$ in eine Potenzreihe um $z_0 = -i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

Hinweis: Stellen Sie $f(z)$ als zweite Ableitung einer Funktion $g(z)$ dar und leiten Sie die Potenzreihenentwicklung von f aus der von g her.

10.2: $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$ soll um $z_0 = 0$ in die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ entwickelt werden.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius aus der Lage der Nullstellen des Nenners.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 nach der Formel $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

(c) Bestimmen Sie eine Rekursionsformel für die a_n, indem Sie die Identität $\frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ zum Koeffizientenvergleich nutzen.

(d) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von f, die Entwicklung der Partialbrüche nach Potenzen von z, und daraus die Formel für a_n.

10.3: Wir zeigen in drei Schritten das folgende Konvergenzkriterium:

Existiert der Grenzwert $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, so ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)$.

(a) Zeigen Sie das Abelsche Lemma:
Ist die Folge $a_n(z_1 - z_0)^n$ beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ absolut für alle z mit $|z - z_0| < r$, wobei $r = |z_1 - z_0|$.

Hinweis: Wählen Sie eine geometrische Reihe als Majorante und nutzen Sie das Majorantenkriterium: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Reihe komplexer Zahlen c_n, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen b_n, und es gelte $|c_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut.

(b) Sei $R > 0$ wie oben gegeben. Zeigen Sie mit (a), daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für jedes z mit $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert.

(c) Zeigen Sie, daß für $|z - z_0| > R$ die Reihenglieder $a_n(z - z_0)^n$ keine Nullfolge bilden.

10.4: Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabe 10.3 bzw. des Satzes von Cauchy-Hadamard den Konvergenzradius folgender Potenzreihen, wobei $k \in \mathbb{R}$:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^k}$$